

Preissmann 技法에 의한 1次元 不定流의 解析

(An Analysis of Unsteady Flow with Preissmann Scheme)

李 鍾 泰*
Jong-Tae Lee,

Abstract

In order to make a numerical modeling for the one dimensional unsteady flow which expressed by Saint Venant partial differential equations, Preissman's implicit scheme was used, and it's stability and accuracy was investigated.

By introducing recurrence relations make it possible to use double sweep algorithm.

Effective parameters to the result were the values of the C_r and the Chezy coefficient. In order to get numerical solutions with enough accuracy, C_r should not be far from the value of 1, and when the criteria of the θ was $0.6 < \theta < 1.0$, the result was always stable for any condition.

This model should be calibrated by real field data, and expected to be developed for the simulation of the river system and to the long wave analysis for one dimensional coastal zone problem.

要 旨

本 研究에서는 1次元 不定流를 나타내는 Saint Venant의 偏微分方程式을 Preissmann의 Implicit 技法에 의하여 有限差分方程式을 構成한 後에 Double sweep 알고리즘을 適用하여 解析하는 問題를 다루었으며, 本 差分方程式의 安定성과 精度를 檢討하였고 C_r , θ 및 Chezy 係數 等의 影響을 1次元 Seiche 運動에 關한 數值實驗을 通하여 分析하여 보았는 바, 그內容은 다음과 같다.

1. 補助關係式을 活用함으로써 Double sweep 알고리즘의 適用이 可能하였다.
2. 解析結果에 가장 큰 影響을 미치는 因子는 C_r , θ 및 Chezy 係數인 바, 높은 精度의 結果를 얻기 위해서 C_r 은 1보다 너무 큰 값은 피해야 될 것이며, θ 의 適合한 範圍는 $0.6 < \theta < 1.0$ 이었다.
3. 本 模型을 1次元 長波의 傳播에 適用하였던 바 安定된 結果를 보였다.

1. 序 論

Saint Venant式은 2個의 非線型 偏微分方程式으로 構成되어 있다. 이 式들을 實際의 流體흐름 解析에 適用함에 있어 特殊한 경우를 除外하고는 解析의 方法으로는 그解를 구하기 어렵다(Yevdjevich)¹⁾ 따라서 별도의 數值解析의 方法이 강구되는 바, 一般적으로 有限差分法에 의해 偏微分方程式을 代數方程式으로 變形시킨 後 컴퓨터에 의해 近似值를 求하게 된다.

一般적으로 安定성과 精度가 explicit scheme보다 높은 implicit scheme은 Richtmyer에 의해 熱傳達의 解

析에 適用된 것이 처음이며 그후 開水路 不定流解析에 사용되기 시작했다.²⁾

本 論文에서는 1960年 以後에 開發된 Preissmann의 SOGREAH scheme을 Saint Venant式에 應用 導入하는 問題에 關하여 檢討하였다.³⁾

2. 理 論 式

Saint Venant式은 雙曲線形 偏微分方程式이며 式(1) (2)와 같이 表現된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b_r \frac{\partial h}{\partial t} - q = 0 \dots\dots\dots(1)$$

* 本學會正會員 釜山水產大學 海洋工學科 助教授

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} - I_b \right) + S_f - u_q \cdot q = 0 \dots (2)$$

에너지損失項 S_f 는 自由水面的 흐름에서는 Manning의 粗度係數, 또는 chezy의 係數로 表現되는 바 흐름의 底面摩擦抵抗의 정도에 따라 그 크기가 決定된다.

式(3), (4)에서

$$S_f = \frac{g|Q|Q}{C^2 AR} \dots (3)$$

$$S_f = \eta^2 \frac{gQ|Q}{AR^{4/3}} \dots (4)$$

3. Preissmann Implicit Scheme

3.1 有限差分方程式

Preissmann에 의하면 獨立係數와 그 微分値를 Fig. 1의 格子網에서 다음 差分式으로 表現하였다³⁾.

$$f(x, t) \approx \frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) \dots (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \dots (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n + f_j^{n+1} - f_j^n \dots (7)$$

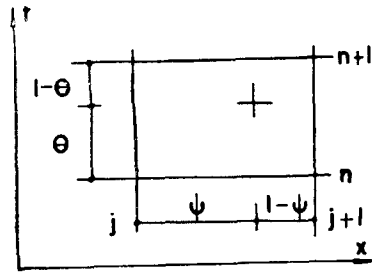


Fig. 1. Preissmann implicit scheme

式(5), (6), (7)의 形式을 (1), (2)式에 適用하고 各格點의 未知變數들을 水深 h 와 流量 Q 로하여 다음과 같은 差分方程式들을 誘導하였다. (式 (8)(9))

$$b_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} \left\{ \frac{1}{2} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n}{\Delta t} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} - q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} \right\} = 0 \dots (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} + \left(\frac{\eta}{A} \right)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{Q_{j+1}^n Q_{j+1}^{n+1}}{\Delta x} - \left(\frac{\eta}{A} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} \frac{Q_j^n Q_j^{n+1}}{\Delta x}$$

$$+ gA_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} \left\{ \theta \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\Delta x} - I_b \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{|Q_j^n| Q_j^{n+1}}{(C^2 AR)_j^{n+1}} + \frac{|Q_{j+1}^n - Q_{j+1}^{n+1}|}{(C^2 AR)_j^n} \right\} - (u_q q)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} = 0 \dots (9)$$

式(8)과 (9)를 整理하면 式(10)과 (11)로 表現되고 各係數의 값들이 決定되게 된다.

$$A1_j Q_j^{n+1} + B1_j h_j^{n+1} + C1_j Q_{j+1}^{n+1} + D1_j h_{j+1}^{n+1} = E1_j \dots (10)$$

$$A2_j Q_j^{n+1} + B2_j h_j^{n+1} + C2_j Q_{j+1}^{n+1} + D2_j h_{j+1}^{n+1} = E2_j \dots (11)$$

3.2 Double Sweep 알고리즘

式(10), (11)로써 $Q_{j+1}^{n+1}, h_{j+1}^{n+1}$ 를 구하기 위한 Matrix로 表現되는 聯立方程式系가 構成되는데, 이러한 境遇에 가장 收斂速度가 빠른 Double Sweep⁵⁾의 處理過程을 위해 2個의 補助關係式(recurrence relations)들을 導入하게 된다. 即(10), (11)式이 補助關係式(12), (13)을 代入하면 式 (12a), (13a)를 얻게 된다.

$$Q_j^{n+1} = F_j h_j^{n+1} + G_j \dots (12)$$

$$h_j^{n+1} = H_j Q_{j+1}^{n+1} + I_j h_{j+1}^{n+1} + J_j \dots (13)$$

$$Q_{j+1}^{n+1} = F_{j+1} h_{j+1}^{n+1} + G_{j+1} \dots (12a)$$

$$h_j^{n+1} = H_j Q_{j+1}^{n+1} + I_j h_{j+1}^{n+1} + J_j \dots (13a)$$

여기서,

$$F_{j+1} = \frac{-D1_j - \alpha I_j}{C1_j + \alpha H_j} \dots (14)$$

$$G_{j+1} = \frac{-\alpha J_j - (A1_j G_j - E1_j)}{C1_j + \alpha H_j} \dots (15)$$

$$H_j = \frac{-C2_j}{\gamma} \dots (16)$$

$$I_j = \frac{-D2_j}{\gamma} \dots (17)$$

$$J_j = \frac{-A2_j G_j + E2_j}{\gamma} \dots (18)$$

단,

$$\alpha = A1_j F_j + B1_j$$

$$\gamma = A2_j F_j + B2_j$$

式(14)~(18)로부터 補助關係式의 係數 $F_{j+1}, G_{j+1}, H_j, I_j, J_j$ 의 값이 Fore Sweep에 의해 먼저 求解된 후 Back Sweep을 통하여 $Q_j, H_j, Q_{j-1}, H_{j-1}$ 의 順序로 解를 구한다.

本 Double Sweep을 可能하게 하기 爲하여서는 境界條件들이 必要하게 된다. 即 F_j, G_j 의 값이 주어지거나 h^{n+1} 의 값이 既知이어야 한다. 外部 境界條件은 다

음 (1), (2), (3)의 세가지 경우중의 하나에 해당되게 되며 각각의 경우에서 F_1, G_1 을 다음과 같이 결정한다.

(1) $h_1 = h_1(t)$ 가 既知일 때

式(12)로부터

$$h_1 = \frac{Q_1}{F_1} - \frac{G_1}{F_1}$$

$F_1 \gg Q_1$ 이면 $G_1 = F_1 h_1$ 이 된다. 適合한 F_1 의 값을 취함으로써 誤差를 無視할 수 있을 정도로 줄일 수 있는 바 Preissmann에 의하면 F_1 의 값은 $10^4 \sim 10^6$ 이다.⁴⁾

(2) $Q_1 = Q(\pm)$ 가 既知일 때

任意的 境界條件에서 Q 는 h 에 對하여 獨立變數가 되기 위해서는 式(12)에서 $F_1 = 0$ 이 되어야 하며 따라서 $G_1 = Q_1$ 이 된다.

(3) $Q_1 = f(h)$ 가 既知일 때

2次項以上の 切斷誤差(Truncation Error)를 無視하면

$$Q_1^{n+1} = f(h_1^n) - \frac{df}{dh_1} h_1^n + \frac{df}{dh_1} h_1^{n+1}$$

따라서

$$G_1 = f(h_1^n) - \frac{df}{dh_1} h_1^n$$

$$F_1 = \frac{df}{dh_1}$$

이 된다.

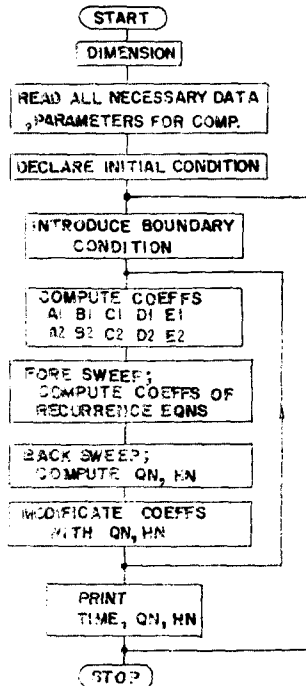


Fig. 2. Flow diagram.

$A_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} \left(\frac{\eta}{\bar{A}}\right)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (C^2 AR)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 등의 값은 初期值로서

$A_{j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\eta}{\bar{A}}\right)_{j+\frac{1}{2}}^n (C^2 AR)_{j+\frac{1}{2}}^n$ 을 取하여 $A_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \left(\frac{\eta}{\bar{A}}\right)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$,

$(C^2 AR)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 을 구한 후 $A_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta} \left(\frac{\eta}{\bar{A}}\right)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (C^2 AR)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 의 近

似值가 1次로 求解된 후 反復 試算을 實施한다. 一般的으로 두 차례의 試算值로서 充分하다고 생각된다.

以上の 內容을 Fig. 2로써 壓縮하여 表現하였다.

4. 檢 定

4.1 安定性和 精度

安定性的 評價를 위하여 線形化(Lineanize)된 方程式에 對하여 Spectral analysis를 適用하였다. 即 解析的 便利를 위하여 側方向 流入과 기타 常數項들을 除去시키면 다음과 같은 線形微分方程式 (19)式으로 나타나는 바 가장 간단한 不定流 基礎方程式의 한 形態이다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

Preissmann形의 差分方程式으로 表現하면

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \\ & + \frac{\theta \left(h_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - h_j^{n+1} \right) + (1-\theta) \left(h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_j^n \right)}{\Delta x} \\ & = 0 \dots\dots\dots(20) \\ & \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - h_{j+\frac{1}{2}}^n + h_j^{n+1} - h_j^n}{2\Delta t} \\ & + \frac{\theta \left(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_j^{n+1} \right) + (1-\theta) \left(u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_j^n \right)}{\Delta x} \\ & = 0 \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

(20)式의 解를 Fourier series의 成分으로 表現하여 (式(21)(22)) (20)式에 代入하면 (23式)이 얻어진다.⁴⁾

$$h_j^n = \bar{h} e^{i(\beta^n \Delta t + \sigma j \Delta x)} \dots\dots\dots(21)$$

$$u_j^n = \bar{u} e^{i(\beta^n \Delta t + \sigma j \Delta x)} \dots\dots\dots(22)$$

$$e^{i\beta^n \Delta t} - 1 = -\frac{4QR^2}{1+4\theta^2 R^2} \pm i \frac{2R}{1+4\theta^2 R^2} \dots\dots\dots(23)$$

여기서, $R = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan\left(\frac{\sigma \Delta x}{2}\right)$

$\beta = \beta^R + i\beta^I$ 로하면 式(23)은

$$e^{-\beta^I \Delta t} \cos \beta^R \Delta t - 1 = -\frac{4\theta^2 R^2}{1+4\theta^2} \dots\dots\dots(24)$$

$$e^{-\beta^I \Delta t} \sin \beta^R \Delta t = \pm \frac{2R}{1+4\theta^2 R^2} \dots\dots\dots(25)$$

式(24), (25)를 $\beta^R \Delta t, \beta^I \Delta t$ 에 對해 各各 풀면 (26)(27)式이 된다.

$$\tan \beta^2 \Delta t = \frac{2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan \left(\frac{\sigma \Delta x}{2} \right)}{\left[1 - 4\theta(1-\theta) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \tan^2 \left(\frac{\sigma \Delta x}{2} \right) \right]} \dots \dots \dots (26)$$

$$e^{-\beta^2 \Delta t} = \frac{1 + 4\theta^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \tan^2 \left(\frac{\sigma \Delta x}{2} \right)}{\sqrt{4R^2 + \left[1 - 4\theta(1-\theta) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \tan^2 \left(\frac{\sigma \Delta x}{2} \right) \right]^2}} \dots \dots \dots (27)$$

(27)式에서 $\theta=0.5$ 일 때 $e^{-\beta^2 \Delta t}$, 即 시간에 따른 解의 減衰(Damping)는 일어나지 않는다. $\theta < 0.5$ 일 때 $e^{-\beta^2 \Delta t} > 1$, 即 不安定하다. 또한 $\theta > 0.5$ 이면 $e^{-\beta^2 \Delta t} < 1$ 即 解의 人爲的 減衰現象이 생긴다. 따라서 振幅(amplitude)에 關해서는 $\theta=0.5$ 로 함이 最適이라 할 수 있으나 波速(celerity)에 對하여는 그렇지 못하다. 即 $\theta=0.5$ 일 때 式(26)은

$$\tan^2 \left(\frac{\beta^2 \Delta t}{2} \right) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \tan^2 \left(\frac{\sigma \Delta x}{2} \right) \dots \dots \dots (28)$$

波速의 數值解析解 c^* 는 $\Delta t/\Delta x=1$ 이 되는 특수한 경우를 제외하고는

$$c^* = \frac{\beta^2}{\sigma} \neq c=1$$

(28)式에서 임의의 $\sigma \Delta x$ 에 對한 β^2 를 구하면 $c^*=f(\sigma \Delta x)$ 의 曲線(Fig. 3)을 얻게 되는 바 數值解析值 c^* 와 $c=1$ 과는 差異가 있음을 보여준다. 또한 $\theta=2/3$ 일 때 式(26)으로부터 Fig. 4의 結果를 얻었다. Fig. 3, Fig. 4에서 볼 수 있는 바와 같이 Fourier series 成分計算值에 의한 波速은 $\Delta x/L, \Delta t, \theta$ 에 좌우된다. 또한 成分(component)이 질 때 ($\Delta x/L$ 이 작을 때) 波速은 解析的 解와 큰 差異가 없으며 특히 $\Delta t/\Delta x=1$ 일 때는 거의 같은 값을 가진다. 한편 Short wave이고 $\Delta t/\Delta x \ll 1$ 일 때 혹은 $\Delta t/\Delta x \gg 1$ 일 때는 그 正反對가 된다. 따라서 成分들의 分散은 $\Delta t/\Delta x$ 가 매우 작거나 또는 매우 클 때 增大된다.

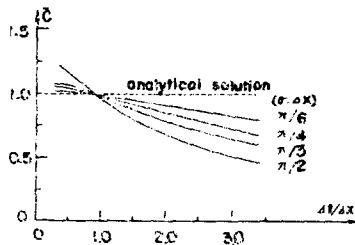


Fig. 3. Comparison of computational and analytical celerities for $\theta=2/3$

4.2 Seiche 振動實驗

上記한 安定성과 精度에 對한 解析理論을 考慮한 Saint Venant 方程式에 對한 1次元 Seich運動에 對한 實驗은 兩端이 閉塞된 延長 10km, 水深 10.0m인 水平한 水路에서 實施되었는 바 그 振動週期 T 는 式(29)으로부터 約 2,019sec이다.

$$T = \frac{2l}{\sqrt{gh}} \dots \dots \dots (29)$$

$DX=1,000M$ 로 하여 $C, (=c \frac{\Delta t}{\Delta x})$ 이 1.0인 境遇와 2.0인 境遇일 때 그 反應의 差異點과 θ 의 값을 0.5, 0.6, 0.8 등으로 變化시켜 가면서 나타나는 變化를 檢討하였다.

Fig. 4는 底面摩擦을 無視한 狀態에서 $C,=2.0$ 일 때 θ 의 값을 變化시켜 본 것인 바, 이 境遇 波速은 θ 의 값이 1.0으로부터 0.6에 가까워질수록 正確解에 接近해 감을 알 수 있었다. 그러나 $0.5 < \theta < 0.6$ 일 때 波形은 振幅과 波形, 波速이 있어서 不安定한 傾向을 볼 수 있었다. 한편 $0.6 < \theta < 1.0$ 일 때 波形은 安定되었는 바 θ 가 커질수록 에너지의 減殺現象이 뚜렷하였다

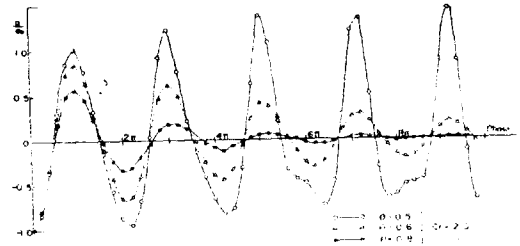


Fig. 4. Comparison of numerical solutions of amplification profile for various values of θ



Fig. 5. Comparison of numerical solutions of amplification profile for various values of $C,$

Fig. 5는 $C,$ 의 값에 따른 波速과 振幅의 變化를 比較한 한 예인 바, $C,$ 이 큰 값으로부터 1.0에 가까워질수록 波速은 4.1에서 記述한 바와 같이 正確解에 매우 가까운 값을 갖게되는 바 θ 를 0.8에서부터 0.6으로 接近시켜 나가면 거의 正確解와 一致된다. 또한 에너지의 減殺되는 程度도 $C,$ 의 크기에 따라 差異가 있다. 即 $C,$ 이 1.0보다 커질에 따라 그 程度는 增大된다. 또

한 底面摩擦은 chezy係數에 의해 調節되는 바 Fig. 6으로부터 그 影響을 確認할 수 있었다.

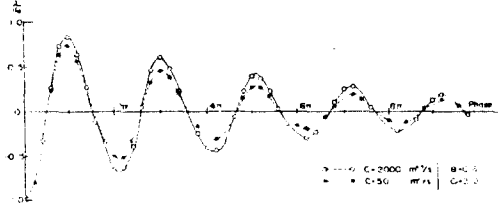


Fig. 6. Comparison of numerical solutions of amplification profile for various values of C

4.3 洪水波의 追跡

本 解析方法에 따라 上流部의 水位·流量變動으로 因하여 下流部에 미치는 影響을 位置時間에 따라 解析해나가는 計算例는 다음과 같다.

(1) 初期條件

$$Q(j\Delta x, 0) = 3162 \text{ (m}^3/\text{S)}$$

$$h(j\Delta x, 0) = 10.0 \text{ (m)}$$

여기서, $j=0, 1, 2, \dots, jj$

(2) 境界條件

上流: Fig. 7.의 水文曲線

$$\text{下流: } h(jj\Delta x, t) = 10 \text{ (m)}$$

上記 (1), (2)의 條件은 上流에 降雨 또는 水門造作에 의해 任意的 水文曲線으로 나타났을 때 下流方向으로의 長波의 傳播을 解析하는 경우인 바 이 때 下流는 바다와 接觸 있으며 潮汐의 影響은 거의 없다고 보았으며 側方向의 流入도 이 境遇에는 考慮하지 않았다.

Chezy의 係數을 매우 크게 하였을 때 θ 值의 變化에 따른 結果値는 Fig. 5, 6과 같아서 θ 의 影響이 매우 重大함을 알 수 있었다. Fig. 8.은 chezy의 값이 實際自然狀態의 값인 $50\text{m}^{1/2}/\text{sec}$, $\theta=0.6$, 傾斜度가 0.0001인 矩形斷面 흐름에서의 24時間의 數值實驗 結果이며 長波는 傳播되는 過程에서 摩擦項과 θ 의 影響으로 減衰現象을 보이고 安定性인지 수렴함을 알 수 있었다.

따라서 chezy係數와 θ 值를 適切히 구사함으로써 本方法은 不定流 흐름의 一次元의 解析에 使用할 수 있는 有用한 技法인을 確認할 수 있었다.

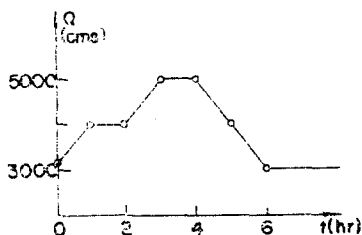


Fig. 7. Hydrograph for upstream boundary condition.

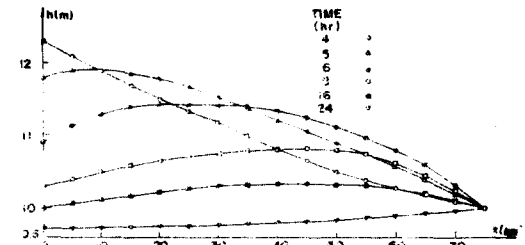


Fig. 8. Model test for propagation of long wave (after peak time at upstream boundary)

5. 結 論

一次元 不定流의 數值解析模型을 만들기 위하여 Preissmann型의 法을 Implicit Saint式에 導入하였으며 模型의 安定性和 精度에 關하여 檢討하였고 數值實驗을 實施하였다.

(1) 補助關係式을 導入함으로써 Double Sweep 알고리즘을 適用할 수 있었다.

(2) 計算結果의 安定性和 精度에 큰 影響을 주는 因子는 C, 및 θ 인 바 C,은 1보다 너무 크거나 작은 경우를 피해야 하며 $0.6 < \theta < 1.0$ 일 때 無條件 安定이다.

(3) 摩擦係數와 θ 值 및 C,值를 適切히 調節하여 實際 흐름에서의 에너지 消滅과 같은 效果를 일게 됨으로써 이 模型은 一次元 不定流의 解析에 있어 매우 有用함을 確認할 수 있었다.

(4) 앞으로 實測資料에 의한 補正과 더불어 支流와 合流가 있는 河川 水系에 對한 System 解析模型 또는 海岸에서의 長波에 對한 一次元 解析模型 등의 開發에 應用될 수 있다.

記 號

- A Cross-Sectional area
- C Coefficient of Chezy
- C, Courant number ($=c \cdot \Delta t / \Delta x$)
- L Wave length
- Q Discharge
- I_b Bottom slope (I : Imaginary quantity, R Hydraulic radius or Real quantity)
- S_f Frictional term
- T Wave period
- a Amplitude
- a_0 Incident amplitude
- a/a_0 Amplification factor
- b, Width
- c Wave celerity

g acceleration of gravity
 h Water depth
 l Basin length
 n Manning's coefficient of roughness
 q Lateral inflow
 t Time
 u velocity
 u_q Lateral inflow velocity
 β ($2\pi/T$), corresponds to the wave frequency
 η Mometum correction factor
 σ ($=2\pi/L$) corresponding to the wave number

参 考 文 献

1. Yevdjevich, V.M. (1964): Bibliography and discussion of flood routing methods and unsteady flow in channels, U.S. Govt. Print. off., Washington, D.C., 235pp.
2. Richtmyer, R.D., and Morton, K.W. (1957): Difference methods for initial value problems, Interscience publishers, New York, 2nd edition, 1967
3. Preissmann, A. 1960): Propagation des intumescences dans les canaux et rivières, Ist Congrès de l'Assoc. Francaise de calcul, Grenoble, p. 433—442
4. Mahmood, K. and Yevjevich, V.(Editors)(1975): Unsteady flow in open channels, Vol 1, Fort collins, pp,484.
5. Abbott, M.B. (1977): Numerical methods, Fifth revised edition, IHE, Delft, pp.96.