多変数시스템에 대한 MRAC

梁海元 (明知大)

이 報告에서는 多入出力시스템에 대한 Model Reference Adaptive Control (MRAC)의 直接法의 알고리즘에 관해 考察한다. 適應則自體는 1入出力의 경우와 거의 같지만, 플랜트가 따라갈 수 있는 모델 시스템의 범위를 규정하는 것이 어려운 問題로 대두된다.

플랜트는 다음과 같은 右既約分解[1]로 表現되는 Strictly Proper mxm nonsingular 傳達行列을 갖는 것으로 한다.

$$G_P(s) = R_P(s)\, P_P(s)^{-1}$$

多項式 行列 P_P (s)는 Column proper이다. 여기서 以下의 論議에 重要한 意味를 갖고 있는 定理를 하나 引用한다.

定理[2] : 시스템 (1)에 대하여

$$\lim_{s \to \infty} \xi(s)\, G_P(s) = K_P \; : \; \text{nonsingular} \tag{2}$$

가 되는 interactor matrix라고 불리우는 mxm行列

$$\xi(s) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ h_{21}(s) & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ h_{m1}(s) & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag}\{ (S+\partial)^{f_i} \} \quad (\partial > 0) \tag{3}$$

가 唯一하게 存在한다.

플랜트 (1)에 대해 다음의 仮定을 한다.

i) 플랜트의 可観測指數의 上限 ν가 既知

ii) 各 i에 대해 $f_i = f$ 이며 f는 既知

iii) 모든 i, j 에해 해 $h_{ij}(s) = 0$

iv) 플랜트의 零點은 安定

한편 (1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y_P(t) = R_P(s)z(t);\; z(t) = P_P^{-1}(s)U(t) \tag{4}$$

플랜트의 入力 $U(t)$는 feed back 成分 $W(t)$와 feedforward 成分 $\nu(t)$의 合으로서, $W(t)$는

$$W(t) = Q_m^{-1}(s)K(s)U(t) + Q_m^{-1}(s)\,H(s)\quad(t) \tag{5}$$

로 한다. $Q_m(s)$는 対角行列이며, 対角 要素는 모두 같은 次의 安定定인 多項式이다. (4), (5)로 부터

$$Q_m(s)P_P(s)Z(t) = Q_m^{(s)}V(t) + Q_m(s)w(t)$$

$$= Q_m(s)V(t) + [K(s)P_P(s) + H(s)R_P(s)]\,z(t) \tag{6}$$

지금 $K(s)$, $H(s)$가 다음의 等式을 만족하는 것으로 한다.

$$K(s)P_P(s) + H(s)R_P(s) = Q_m(s)P_P(s) - G\xi(s)P_M(s)R_P(s) \tag{7}$$

$P_M(s)$는 모델시스템의 傳達行列의 分母多項式対角行列이며, 各 対角電素는 ν 次의 安定인 多項式이다. $K(s)$, $H(s)$는 全要素가 $(\nu - 1)$次

의 多項式이다. G는 (7)의 양변의 次數를 一致시켜 주기 위한 常數 行列이다.

(6), (7)로 부터

$$Q_m(s)V(t) = G\xi(s)P_M(s)R_P(s)Z(t) \tag{8}$$

가 되므로 V(t)에서 $Y_P(t)$까지의 傳達行列은 $[G\xi(s)P_M(s)]^{-1}Q_m(s)$ 가 되어 V(t)를 $V(t) = Q_m^{-1}(s)G\xi(s)R_M(S)V(t)$ 라고 하면 全體의 傳達行列은

$$[G\xi(s)P_M(s)]^{-1}Q_m(s)\ \ Q_m^{-1}(s)\,G\xi(S)\,R_M(S) = P_M^{-1}(S)\,R_M(S) \tag{9}$$

가 되며 이것이 바로 모델시스템의 傳達行列이다. $R_M(s)$는 $Q_m^{-1}(s)G\xi(s)R_M(s)$가 Proper이도록 선정되어야 한다.

지금까지는 시스템의 Parameter를 알고 있을 때의 制御方式인데, 만일 그것들이 未知인 경우에는 다음과 같은 適應 알고리즘을 필요로 한다. 즉 出力誤差 e(t)를

$$\begin{aligned} P_M(s)e(t) &= P_M(s)(Y_P(t) - Y_M(t)) \\ &= Q_m(s)[G^{-1}\xi(s)U(t) - G^{-1}K(s)(\xi(s)Q_m(s))^{-1}U(t) \\ &\quad - G^{-1}H(s)(\xi(s)Q_m(s))^{-1}y_P(t) - Q_m^{-1}(s)R_M(s)r(t)] \end{aligned} \tag{10}$$

로 나타내면

$$e(t)= P_M^{-1}(s)Q_m(s)[\,\bar{\Theta}^T\,\bar{\varphi}\,(t)+ Q_m^{-1}(s)R_M(s)\ r(t)\,] \tag{11}$$

와 같이 쓸수 있다. 여기에서 확장오차[3] $\eta(t)$를

$$\eta(t)= e(t)- e(t)+ P_M^{-1}(s)\rho\ \mathring{\bar{\Theta}}(+)\ \ \bar{\varphi}\,(t)$$

$$= P_M^{-1}(s)Q_m(s)[\,-\bar{\Theta}+\bar{\Theta}(t)+\rho\ \mathring{\bar{\Theta}}(t)\,]\ \bar{\varphi}(t) \tag{12}$$

로 定義하고 다음과 같은 適應則[4]을 쓰기로 한다.

$$\mathring{\bar{\Theta}}(t)= -\ F(t)\ \bar{\varphi}(t)\eta(t)^T$$

$$\frac{dF(t)^{-1}}{dt} = -\alpha(t)F(t)^{-1} + \beta(t)\bar{\varphi}(t)\,\bar{\varphi}(t)^T \quad (\ \alpha(t)\geq 0\ ) \tag{13}$$

$\beta(t)$로 주어진 條件을 만족하는 것으로 한다. 한편 플랜트의 入力 $U(t)$를

$$U(t)= G(t)[\,\Theta(t)^T\ \ \xi(s)\ \varphi(t)+ Q_m^{-1}(s)\xi(s)R_M(s)r(t)\,] \tag{14}$$

에 의해 발생시키면 알고리즘의 수렴과 시스템全體의 安定性을 보증하게 되어 $y_P(t)$가 $y_M(t)$와 一致하게 됨을 알수 있다.

참 고 문 헌

1. Kailath , T ; Linear Systems, Prentice-Hall, 1980.
2. Wolovich, W.A. and Falb, P.L. ; SIAM J. Control and Optm, vol. 14, 996-1088, 1976.
3. Narendra, K.S., et al ; IEEE Trans., AC-25, 440-448, 1980.
4. Landau, I.D. ; IEEE Trans., AC-25, 814-817, 1980.