Moving Horizon을 사용한 안정화 방법

권욱현 (서울대)

시불변 시스템의 안정화 (Stabilization) 방법은 여러가지 좋은 방법이 알려져 있으나 시변 (time-varying) 시스템의 안정화 방법은 극히 드물다. 시변시스템

$$\dot{x}(t) = A_t \, X(t) + B_t \, U(t) \tag{1}$$

에서 선형최적제어 문제는 다음과 같은 목적함수

$$J_o = \int_{t_i}^{t_f} [\, X'(2) Q_2 \, X(2) + U'(2) R_2 \, U(2) \,] \, d_2 + x'(t_f) F_{tf} \, X(t_f) \tag{2}$$

최소로 하는 입력함수를 구하는 문제이다. Kalman [1] 이 상기 문제를 깊이 연구하였으며 여러가지 성질을 구명하였다. 상기문제의 최적입력은 다음과 같이 주어진다.

$$U^o = -Rt^{-1} \beta_t' \, K(t, t_f) \, x(t) \tag{3}$$

$$-\frac{-d}{d_2} K(2, t_f) = K(2, t_f) A_2 + A_2' K(2, t_f) - K(2, tf)$$

$$B_2 R_2^{-1} B_2' K(2, t_f) + Q_2 \tag{4}$$

상기 식에서 $K(t_f, t_f) = F_{tf}$. 위의 표준 문제에서 infinite norizon인 경우($t_f = \infty$) 제어입력(3)이 시스템(1)을 안정화 시키며 [1, 2,], 이 방법이 시변시스템을 안정화 시키는 성질이 있으나 $t_f = \infty$에서부터 Riccati 식을 계산하는 것은 거의 불가능하다. 이 방법을 개선하기 위하여 본 저자가 [3, 4]에서 Moving horizon 방법을 도입하였으며 이것은 다음과 같은 목적함수

$$J_m = \int_t^{t+\tau} [x'(2)Q_2\, x(2) + U'(2)R_2\, U(2)]\, d_2 + x'(t+\tau)$$

$$F_{t+\tau}\, x(t+\tau) \qquad (4)$$

를 최소로 하는 입력함수를 구하는데 목적이 있다. 입력함수는 다음과 같이 주어지며

$$U^m(t) = -R_t^{-1} B_t' K(t', t+\tau)\, x(t) \qquad (5)$$

이때 $K(t, t+\tau)$는 Finite구간에서 계산이 되므로 계산이 용이하다. $F_{t+\tau} = \infty$인 경우 시스템이 안정함이 증명되었다.[3]
특히 $Q_2 = 0$인 경우 입력함수는

$$U^m(t) = -R_t^{-1} B_t' W^{-1}(t, t+\tau)\, x(t) \qquad (6)$$

로 주어지며 여기서 $W(t, t+\tau)$는 Controllability Matrix 시불변시스템의 경우 (6)은 잘 알려져 있는 Kleinman방법[5]이 된다.

본 논문에서는

(i) $F_t = \infty$를 포함한 여러 종류의 경우에 안정화 시키는 조건을 구하며

(ii) 모든 F_t의 경우 시스템을 안정화시키는 Finite horizon이 존재함을 보여 주고

(iii)매순간 순간 (t + T)에서 t까지 Riccati 방정식을 계산하는 번거러움을 없애기 위하여 Scattering 방법 [6 , 7 , 8]을 도입하여 Rewrsive (순차적)한 계산방법을 유도한다.

참 고 문 헌

(1) R.E. Kalman, "Contributions to the Theory of Optimal Control", Bul. Soc. Math. Mex., vol 5, 1980.

(2) M. Athans, "The Role of the Stochastic Linear Quadratic Gaussian Problem in Control Sytem Design", IEEE Trans. Automatic Control, AC16,1971

(3) W.H. Kwon and A.E. Pearson. "A Modified Quadratic Cost Problem and Feedback Stabilization of a Linear-System", Automatic Control, AC23, 1977.

(4) W.H. Kwon and A.E. Pearson, "On Feedback Stabilization of Time Varying Discrete Linear Systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC23, 1976.

(5) D.L. Kleinman, "An Easy Way to Stabilize a Linear Constant System", IEEE Trans. Automatic Control, AC15, 1970.

(6) R Redheffer, "Difference Equations and Functional Equations in Transmission-line Theory", in Modern Math. for the Engineer (E.F. Beckenbach ed.), Mc Graw-Hill, New York, 1961

(7) G. Verghse, B. Friedlander and T. Kailath, "Scattering Theory and Linear Last-Squares Estimation, Part III: The Estimates" IEEE Trans. Automatic Control; AC-25, 1980.

(8) A.M. Bruckstein and T. Kailath. The Unified Approach to State Space Estimation Problems, ISL Report, Stanford University, 1982.

(9) W.H. Kwon, A.M. Bruckstein and T. Kailath "Stabilizing State-Feedback Design via the Moving Horizon Method," to appear.