Navier-Stokes 運動方程式을 差分方程式으로 푸는 경우의 安定性에 対하여

成均館大学校

工科大学 金 治 弘

微分方程式의 差分化에는 몇가지 種類의 方法이 있고 그 差分式에서는 精度가 좋을 뿐 아니라 計算의 進行에 随伴되는 安定性이 問題가 된다. 非線形項을 包含하고 있을 경우의 差分近似化는 상당히 어려운 것이다.

F.G. Shuman 은 몇 個의 差分型式 (Momentum, Semi-Momentum, Advective, Filtered Factor Form 등) 에 対하여 時間과 함께 系의 에너지가 增減하는가, 一定하는가를 数値実験을 通하여 調査해서 安定性을 確認하는 것을 試図하고 있다. 海溢計算의 경우에는 海底摩擦力, 慣性力의 差分式 에 問題가 있어 解析的으로 安定条件의 検討를 行한 바 있어 이를 発表코저 한다.

a) 우선 簡単한 微分方程式 (1)을 생각한다.

$$\frac{dM}{dt} = aM + f(t) \tag{1}$$

이것을 $(M)_{t} = n\Delta t$ 을 M^{n} 이라고 証하여

$$\frac{M^{n+1} - M^{n-1}}{2\Delta t} = aM^{n} + f(n) \tag{2}$$

라고 差分하는 경우에는 X^{n+1} (M^{n+1}, M^{n}) 을 X^{n} (M^{n}, M^{n-1}) 에 結付

시키는 線形作用素

$$R = \begin{bmatrix} \frac{2a\triangle t}{1} & \frac{1}{0} \end{bmatrix} \tag{3}$$

을 생각한다. 이 作用素 R의 固有値 λ는

$$\lambda = a\triangle t + \sqrt{a^2\triangle t^2 + 1} \tag{4}$$

이고 $a < 0$일때 $|\lambda| > 1$이고 差分近似 (2)는 不安定하게 된다. 安定한 差分式은 다음에 証明하는 것처럼 aM의 項을 aM^n이 아니고 $a(M^{n+1}+M^{n-1})/2$라고 하여야 한다.

b) 다음에 一般的으로 Coriolis force와 海底摩擦力을 包含하는 式

$$\frac{\partial M}{\partial t} = fN - eM\sqrt{M^2+N^2} + C_1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -fN - eN\sqrt{M^2+N^2} + C_2 \tag{6}$$

을 初期条件 $M = M_0$, $N = N_0$ 下에 푸는 경우를 생각한다. (5), (6)을

$$\frac{M^{n+1} - M^{n-1}}{2\triangle t} = fN^n - \left\{ e\sqrt{(M^n)^2+(N^n)^2} \right\} M^n + C_1 \tag{7}$$

라고 近似시키면 a)로부터 不安定임을 안다. 그러나 이것을

$$\frac{M^{n+1} - M^{n-1}}{2\triangle t} = fN^n - \frac{e}{2}(M^{n+1}+M^{n-1})\sqrt{(M^n)^2+(N^n)^2} + C_1 \tag{8}$$

$$\frac{N^{n+1} - N^{n-1}}{2\triangle t} = -fM^n - \frac{e}{2}(N^{n+1}+N^{n-1})\sqrt{(N^n)^2+(N^n)^2} + C_2 \tag{9}$$

라고 近似시키면 좋다는 것이 다음과 같이 하여 안다. 지금 다음과 같은 置換을 한다.

$$\alpha = \frac{1 - e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}} \qquad \beta = \frac{2f\Delta t}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}}$$

$$\gamma_1 = \frac{2C_1\Delta t}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}} \qquad \gamma_2 = \frac{2C_2\Delta t}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}} \tag{10}$$

α, β, γ_1, γ_2 의 變化는 그다지 크지 않고 計算過程의 数 10 step에서는 常数로 看做된다. 式 (8), (9)는

$$M^{n+1} = \alpha M^{n+1} + \beta M^n + \gamma_1 \tag{11}$$

$$N^{n+1} = \alpha N^{n+1} + \beta N^n + \gamma_2 \tag{12}$$

가 된다. 이것은 또 行列記法을 쓰면, 다음과 같이 된다. 지금 4次元 vector X_i, Y_i, 線形作用素 R을

$$X_i = \begin{pmatrix} M^{i-1} \\ N^{i-1} \\ M^i \\ N^i \end{pmatrix} \quad Y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

라고 하면 式 (11), (12)는

$$X_{n+1} = RX_n + Y \tag{14}$$

가 된다.

이것을 遂次 使用하면,

$$X_{n+}{}^1 = R^n X_1 + (R^{n-1} + R^{n-2} + R^{n-3} + \cdots + R^2 + R + E)Y \tag{15}$$

가 된다. 여기서 E는 4次元 単位行列이다. 따라서 差分式의 安定条件은 R의 固有方程式

$$|\lambda E - R| = (\lambda^2 - \alpha)^2 + \beta^3 \lambda^2 = 0 \qquad (16)$$

의 根의 모든 絶対値가 1보다 적든가 또는 絶対値가 1과 같은 것이 있어도 重根이 될 수 없다는 것이다. 式 (10)부터 $0 < \beta \leqq \alpha < 1$이므로 R의 固有値 λ는 $|\lambda|^2 = \alpha < 1$가 되어 差分方程式 (19), (20)은 安定하다.

c) 慣性項은 普通 省略되는데 防潮堤 開口部와 같이 流速変動이 큰 곳에서는 考慮하지 않으면 안된다. 微分方程式 (18)의 差分近似로서 다음의 두가지 경우를 생각한다. 즉

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + f(t, x) \quad (0 < x < 1,\ u(0) = u(1) = 0) \qquad (18)$$

$$\text{(I)} \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a\,\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + f_i^n \qquad (19)$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a\,\dfrac{U_{i+1}^n - U_i^n}{2\Delta x} + f_i^n \\[2ex] \dfrac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = a\,\dfrac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} + f_i^n \end{cases} \qquad (20)$$

지금 $\gamma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$, $V_i = U_i^{n+1}$, $U_i = U_i^n$ (21)라고 놓고 (N-1)次元 vector $U = (U_1, U_2, \cdots U_{n-1})$을 (N-1)次元 vector $V = (V_1, V_2, \cdots V_n)$을 対応시키는 線形作用素 R_{I}, R_{II}, R_{II}'를 생각한다.

(I) $R_{I} : V_i = U_i + \frac{\gamma}{2}(U_{i+1} - U_{i-1})\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$ (22)

(II) $R_{II} : V_i = (1-\gamma)U_i + \gamma U_{i+1} \qquad (\gamma > 0)$ (23)

$R_{II}' : V_i = (1+\gamma)U_i - \gamma U_{i-1} \quad (\gamma < 0)$ (24)

作用素系 R_{I}, R_{II}, R_{II}'를 行列를 表示하면 式 (25),(26)이 된다.

$$R_{I} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma/2 & & & & \\ -\gamma/2 & 1 & \gamma/2 & & & \\ & -\gamma/2 & 1 & \gamma/2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma/2 & 1 & \gamma/2 \\ & & & & \gamma/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

$$R_{II} = \begin{pmatrix} 1-\gamma & \gamma & & & & \\ 0 & 1-\gamma & \gamma & & & \\ & 0 & 1-\gamma & \gamma & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1-\gamma & \gamma \\ & & & & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix} \quad R_{II}' = \begin{pmatrix} 1-\gamma & 0 & & & & \\ -\gamma & 1-\gamma & 0 & & & \\ & -\gamma & 1-\gamma & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma & 1-\gamma & 0 \\ & & & & -\gamma & 1-\gamma \end{pmatrix} \qquad (26)$$

우선 方法 (I)에 대하여 檢討한다. R_{I}의 高有値는 行列 $S = R_{I} - E$〔E는 (N−1)次 単位行列〕의 固有値와 1과의 合인데 行列 S는 Skew-Symmetric이므로 그 固有値는 純虛数이다. 따라서 R_{I}의 固有値의 絶対値는 恒常 1보다 크다. 즉 差分近似 (I)은 安定이 아니다.

方法 (Ⅲ)에 對해서는 $R_{Ⅲ}$의 固有値는 $(1-\gamma)$, $[\gamma \geq 0]$, $R_{Ⅲ}'$의 固有値는 $(1+\gamma)$ $[\gamma \leq 0]$이다. 따라서 $a \geq 0$일때 (20)式을 使用할 수 없고 $a \leq 0$일때는 (19)式을 使用할 수 없다. 이것은 다음과 같이도 말할 수 있다. 例를 들어 $a > 0$일때 点(t_o, x_o)의 附近에서 $U(t, x_o)$ $[t_o < t < t_o + \Delta t]$의 값은 $U(t_o, x)$, $[x_o < x < x_o + a\Delta t]$만에 依存한다. 그러므로 (20)式을 쓸 수 없다. 또 이 事実로부터 Δx로서 $\Delta x \geq |a| \Delta t$ 또는 $|\gamma| \leq 1$ (27)라고 되어 있지 않으면 (19),(20)式은 不適当한 近似이다.

以上으로부터 慣性項을 包含하는 方程式의 差分近似로서는 $N^n_{i,j}$ $(x = j\Delta x,\ y = j\Delta y,\ t = n\Delta t)$의 正負에 対応해서 다음과 같이 後方差分 또는 前方差分을 쓰면 計算은 安定된다.

$$\frac{N^{n+1}_{i,j} - N^n_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{N^n_{i,j}}{(h+\zeta)} \cdot \frac{N^n_{i,j} - N^n_{i,j-1}}{\Delta t} + \cdots \quad (N^n_{i,j} > 0) \qquad (28)$$

$$\frac{N^{n+1}_{i,j} - N^n_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{N^n_{i,j}}{(h+\zeta)} \cdot \frac{N^n_{i,j+1} - N^n_{i,j}}{\Delta t} + \cdots \quad (N^n_{i,j} < 0) \qquad (29)$$