Approximate State Generator For Control

서 일 홍 , 김 승 필 , 변 증 남 I. H. Suh, S. P. Kim, and Z. Bien

한 국 과 학 원 전 기 및 전 자 공 학 과

개 요

선형 시간 불변 시스템을 최적제어 하거나, 시스템의 pole 을 임의로 선정하여 바람직한 출력반응을 얻고자 하며, 일반적으로 System의 모든 상태(state) 변수를 알아야한다. 그렇지만 실제로 상태변수들 중의 몇몇은 직접적인 측정이 어렵거나, 혹은 측정장치가 한정되어 있어 원하는 상태변수를 알아내기가 어려운 경우가 많다. 이와 같은 이유로 인하여 System의 모든 상태변수를 한정된 출력으로 부터 알아낼수 있는 방법이 많이 연구되어져 왔다. 이들 방법들중 가장 간단한 상태측정방법은 순수 미분기를 사용 하는 것이었다 (1). 그렇지만 이 방법은, 개념적으로 쉽게 설계할수 있음에도 불구하고, 실제로 응용하는데에 있어서 순수 미분기를 구현 하기가 어렵고, 또 잡음에 대한 민감도 때문에 사용이 거의 불가능 하다.

상태변수를 Estimation하기 위한 또 하나의 방법으로서 자주 사용되는 것이 Asymptotic State estimator 이다 [1]. 그렇지만 이 방법에서 문제가 되는 것은 Asymptotic State estimator자체의 dynamics 때문에, Closed-loop Control 을 고려하는 경우, 설계자가 원하지 않는 Zero 가 삽입되는 경우가 있다. 이들 Zero 때문에 출력반응 (Closed-loop Output Response) 이 실제 원하는 것과는 차이가 난다.

본 논문에서는 System 의 이용 가능한 출력과 그 출력의 시간지연 (time-delayed) 된것들의 linear combination 에 의하여 Approximate State 들을 generation 하는 방법들이 연구되었다.

방법 1)

Proportional minus Delay 동작이 Averaged deviative [2] 성질이 있음을 이용하여 k 번째 미분항을 k 개의 PMD 를 cascade 한것으로 Approximation 하여 사용했다 [3].

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

(1) 식으로부터

$$s = \frac{1}{h}\left(1 - e^{-sh}\right) \qquad (2)$$

그러므로 k번째 미분항의 PMD cascade Approximation 은

$$s^{k} = \left(\frac{1}{h}\left(1 - e^{-sh}\right)\right)^{k} \qquad (3)$$

이다. 여기서 h(time-delay) 가 크면 잡음에 대한 민감도가 적어지나, 순수 미분에 대한 Approximation정도

가 길어진다. 이러한점을 개선하기 위하여 아래에 주어지는 정리를 사용한다.

(정리) n 차의 시간에 대한 Polynomial $y(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$ 에 대해 N 차의 근사미분기 $(\frac{1}{h}(1-e^{-sh}))^N$ 은 n(단 $n \leq N$)과 h 에 상관없이 순수 미분기 s^N과 같은 미분값을 갖는다.

이제 (3)식에 주어지는 근사미분기가 정리를 이용하여 개선될 수 있다. 즉, 주어진 System의 출력이 시간에 대한 n 차의 Polynomial 로 표현될수 있다면 n 차 미분은 근사미분기에 의하여 정확히 구할수있다.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{h}(1-e^{-sh})\right)^n Y(s)\right] = \hat{y}^{(n)}(t) = y^{(n)}(t) = a_n \cdot n! \qquad (4)$$

(n-1)차 미분치를 구하기 위하여 (4)식의 $\hat{y}^{(n)}$ 을 적분하면

$$\int_0^t \hat{y}^{(n)}(t)\,dt = n!\,a_n t \qquad (5)$$

근사미분기에 의하여 구한 (n-1)차 미분과 (5)식과의 차이를 구하면

$$\hat{y}^{(n-1)}(t) - \int_0^t \hat{y}^{(n)}(t)\,dt = (n-1)!\,a_{n-1} + e_n(a_n,h) \qquad (6)$$

이다. h 는 정해진 상수이고, a_n은 (4)식으로 구할수 있으므로 근사미분기에서 구한 $\hat{y}^{(n-1)}(t)$ 에서 오차항 $e_n(a_n,h)$ 를 빼어주면 정확한 미분치를 구할수있다. 일반적으로

$$\hat{y}^{(n-k)}(t) - \int_0^t \hat{y}^{(n-k+1)}(t)\,dt = (n-k)!\,a_{n-k} + e_{n-k+1}(a_n,a_{n-1},\cdots,a_{n-k+1},t,t^2,\cdots,t^{k+1},h) \qquad (7)$$

그러므로 (4), (5)식으로 부터 시작하여 위의 방법을 반복적으로 차례로 적용하면 y(t)의 모든 미분치 $y^{(1)}(t)$, $y^{(2)}(t), \cdots, y^{(n)}(t)$ 을 근사미분기를 써서 정확히 구할수가 있다. 여기서 (3)식의 방법은 시스템의 차수보다 1개작은 개수의 Delay가 필요하나, (4) - (7)식에서 주어지는 개선방법은 (3)식보다 많은 Delay와 적분기를 요구한다.

(방 법 2)

Dealy Operator e^{-hs} 는 다음과 같이 Approximation 될수있다.

$$e^{-sh} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{sh}{n}\right)^n \doteq \left(1-\frac{sh}{N}\right)^N \qquad (8)$$

(8)식에서 s 를 delay로 Approximation하기 위해 N=1 을 대입 한다.

$$e^{-sh_1} \doteq 1 - sh_1 \qquad (9)$$

(9)식으로부터

$$s = \frac{1}{h}\left(1-e^{-sh_1}\right) \qquad (10)$$

s^2 을 Delay 로 Approximation하기 위해 N=2 를 (8)식에 대입하면

$$e^{-sh_2} \cong \left(1-\frac{h_2s}{2}\right)^2 = 1 - h_2s + \frac{h_2^2}{4}s^2 = 1 - h_2\left\{\frac{1}{h_1}\left(1-e^{-h_1s}\right)\right\} + \frac{h_2^2}{4}s^2 \qquad (11)$$

그러므로 (11)식에서 s^2 을 구하면

$$s^2 = 4\,\frac{h_2-h_1}{h_1h_2^2} - \frac{e^{-sh_1}}{h_1h_2} + \frac{e^{-sh_2}}{h_2^2} \qquad (12)$$

이다. 이와 같은 방법으로 s^k를 구하면

$$s^k = F\,(h_1, h_2, \cdots, h_k, e^{-sh_1}, e^{-sh_2}, \cdots, e^{-sh_k}). \tag{13}$$

단 $h_1 < h_2 < h_3 < \cdots < h_k$

방법 1)과 (방법 2)를 사용하여 3차 시스템의 Pole assignment 문제를 Simulation 하였다. (방법 1) 에서 보다 (방법 2) 에서는 $h_2, h_3, \cdots, h_k$ 라는 자유도가 증가하여 전체폐회로 System 의 출력반응을 개선 시킬수가 있다.

Time-delay 를 이용하여 State 를 generation하는 문제는 Gilchrist [4] 에 의하여 생각되어졌었다. 그의 방법에서는 Delay 를 사용하여 정확한 State 를 generation할수 있으나, algorithm 이 복잡하여 쉽게 구현하기가 어려울것으로 기대된다. Delay 의 제어를 위한 사용 예는 [5]에서 주어졌다.

참 고 문 헌

[1]. C. T. Chen, Introduction to Linear System Theory, Chap. 7, Holt Rinehalt Winston, 1970

[2]. I. H. Suh, and Z. Bien, "Proportional minus Delay Controller," IEEE, Trans. Automat. Contr. Vol. AC-24. pp. 370-372, 1979

Z. Bien and I. H. Suh, "Controller with Multiple Delays," Proceedings of 1979 IEEE International Symposium on Circuit & Systems, Tokyo, Japan, July 17-19, 1979

[4]. J. D. Gilchrist, "N-observability for Linear Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-11, pp. 388-395, 1966

[5]. I. H. Suh and Z. Bien, "Use of Time-delay Actions in the Controller Design," submitted to IEEE Trans. Automat. Contr. for Publication.