Granular Noise of Delta Modulation for a First-Order Markov Signal

文相在 · 孫鉉
(慶北大學校 電子工學科)

Moon, Sang-Jae · Son, Hyun
(Dept. of Electronics, Kyungpook National Univ.)

I. 序論

Delta 變調器의 local decoder 출력 신호가 입력신호를 적절히 추적할 때 발생되는 量子化雜音이 granular noise 이다. 이 잡음은 PCM의 granular noise와 같은 특성을 지닌다. Delta 變調器에서 prediction 기능을 지닌 local decoder의 신호가 잡음을 포함해서 입력단에 귀환되므로, PCM의 量子化雜音 理論이 직접 적용되지 않아, 정확한 DM 雜音解析이 어렵다.

음성信号나 비디오 신호를 Nyquist rate 보다 높게 sample한 sample sequence는 first-order Markov process로 모델화 할 수 있다 [1], [2]. 이 때 信号対雜音比 (SNR)는 adjacent correlation c, prediction coefficient a 및 입력신호와 잡음간의 cross-covariance의 함수로 표시된다. 이 수식은 量子器의 SNR 및 신호와 잡음間의 cross-covariance를 정확히 계산하기 어렵기 때문에 여러가지 조건을 가정함으로써 근사식으로 접근시킨다. N.J. Jayant는 prediction coefficient a와 adjacent correlation c가 1에 가까울 때 적용되는 근사식을 유도하였다 [2]. P. Cummiskey는 최적상태의 信号対雜音比를 구하였다 [3].

本 論文에서는 first-order Gaussian Markov 신호에 대한 정확한 SNR 식을 구하고, 이로부터 근사식으로 접근시킬 수 있는 조건에 관하여 고찰한다. Gaussian 입력신호와 잡음間의 cross-covariance로부터 granular noise의 일반적 특성을 살펴본다.

II. Exact SNR

아래 그림 1은 本 解析에 사용한 DM이다.

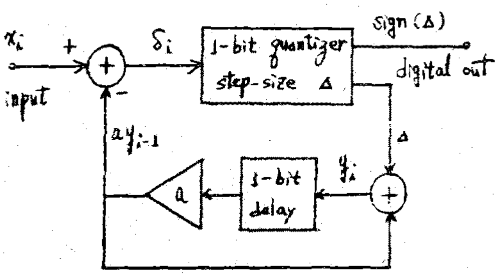

Fig. 1 Block diagram of delta modulator

입력 $\{x_i\}$는 first-order Markov process로 모델화 하면

$$x_i = c x_{i-1} + s_i \qquad (1)$$

이다. 여기서 x_i와 s_i를 $E(x_i) = E(s_i) = 0$ 이고, quasi-stationary process로 두면 adjacent correlation

C는 $E(x_i x_{i-1})/E(x_i^2)$ 이다. 그리고 a는 prediction coefficient 이다. 그림1에서 $\delta_i = x_i - a y_{i-1}$ 과 $e_i = y_i - x_i$ 에서 y 변수를 소거하여 $E(\delta_i^2)/E(x_i^2)$ 을 구한다. 이 값 대신에 다음 (2)식을 이용하면 (3)식이 된다:

$$SNR \triangleq \frac{E(x_i^2)}{E(e_i^2)} = \frac{E(x_i^2)}{E(\delta_i^2)} \cdot SNR\Big|_g \qquad (2)$$

$$SNR\Big|_g = \frac{E(\delta_i^2)}{E(e_i^2)} \text{ : SNR of 1-bit quantizer}$$

$$SNR = \frac{SNR\big|_g - a^2}{1+a^2-2ac-2a(c-a)\dfrac{E(x_i e_i)}{E(x_i^2)}} \qquad (3)$$

수신측의 decoder 에서는 저역통과 여파기를 거쳐 출력되므로 flat 한 잡음중 대역폭 밖의 잡음성분이 억압되어 SNR 값이 개선된다. 즉

$$SNR\Big|_{LP} = SNR \cdot \frac{f_s}{2f_0}$$

이다. 여기서 f_s는 sampling rate 이며, f_0는 여파기의 대역폭이다.

II. Cross-covariance 및 근사 SNR 식

D. J. Goodman 이 Gaussian 입력신호 x_i 와 DM의 출력신호 y_i 間의 cross-covariance 식을 유도하였다 [4].

$$E(x_i y_i) = \left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{2\pi^2 m^2}{\Delta^2/E(x_i^2)}\right]\right\} E(x_i^2) \qquad (4)$$

$e_i = y_i - x_i$ 로부터 구한 $E(x_i y_i)$ 에 (4)식을 대입하면 신호와 잡음 間의 cross-covariance $E(x_i e_i)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{E(x_i e_i)}{E(x_i^2)} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{2\pi^2 m^2}{\Delta^2/E(x_i^2)}\right] \qquad (5)$$

(5)식은 granular noise 에 적용될 수 있으므로, overload effect 를 무시하기 위해서는 step-size 에 의한 기울기 $f_s \cdot \Delta$ 가 ~~E(~~ $\sqrt{E\{[x'(t)]^2\}}$ 의 4배로 설정해야 한다 [4]. first-order Markov 신호의 $E\{[x'(t)]^2\}$ 를 구하고, 이를 이용하여 $f_s \cdot \Delta = 4\sqrt{E\{[x'(t)]^2\}}$ 에서 $\Delta/E(x_i^2)$ 를 (5)식에 대입하면

$$\frac{E(x_i e_i)}{E(x_i^2)} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 m^2}{16(1-c)}\right] \qquad (6)$$

이다. 그러므로 (3)식에 대입하면

$$SNR = \frac{SNR\big|_g - a^2}{1+a^2-2ac-4a(c-a)\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 m^2}{16(1-c)}\right]} \qquad (7)$$

이다. 여기서

$$\gamma = \frac{4a(c-a)}{1+a^2-2ac} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 m^2}{16(1-c)}\right] \qquad (8)$$

라 두면, $\gamma \ll 1$ 인 조건에서 다음과 같은 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$SNR\Big|_{approx} = \frac{SNR\big|_g - a^2}{1+a^2-2ac} \qquad (9)$$

여기서 $a = c - \epsilon$ 라 두고 c 값에 대한 γ의 값을 그라프

로 나타내면 다음과 같다. 여기서 ϵ는 일반적으로 1에 비해 극히 작다. (8)식을 변형하면

$$Y \approx \frac{4\delta \cdot c \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 m^2}{16(1-c)}\right]}{1-c^2} \quad (9)$$

이다.

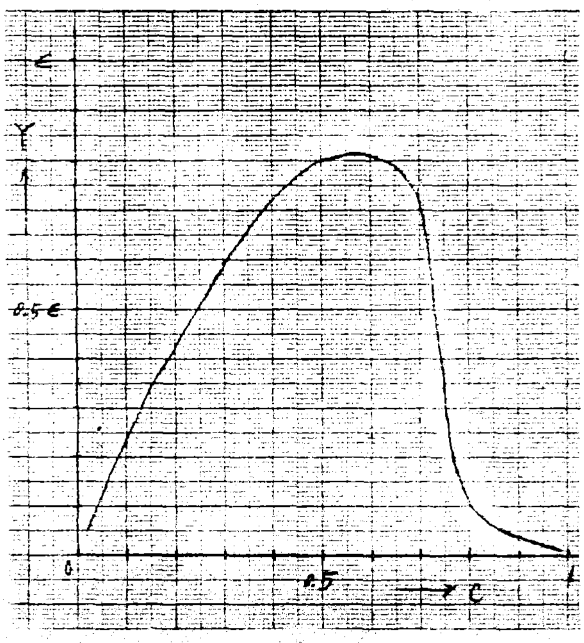

Fig.2 Y vs. C

Delta 變調器를 구성할 때 prediction coefficient a가 c 값에 근사하면 $\epsilon \ll 1$이다. 그림 2에서 최대값이 ϵ보다 작으므로 $Y \ll 1$이 성립되어, 이 경우 근사식 (9)로부터 상당히 정확한 값을 계산할 수 있다. prediction a가 c에 근사하여 나타나는 granular noise는 white Gaussian noise이며 입력신호 x_i에 무관함을 알 수 있고 c의 값에 무관함을 의미한다. 일반적으로 Gamma나 Laplace 電壓確率分布函數를 가진 신호가 입력되어 잡음이 granular noise로 구성된 경우에도 (8)식이 적용될 수 있음을 예측할 수 있다.

IV. 結論

First-order Gaussian Markov 신호자의 adjacent correlation을 c, 그리고 DM의 local decoder의 prediction coefficient를 a로 두면 정확한 SNR 식은

$$SNR = \frac{SNR/_q - a^2}{1+a^2-2ac-4a(c-a)\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 m^2}{16(1-c)}\right]}$$

이다. c 값에 무관하게 a 값만 c에 근사하고, 잡음이 granular noise로 구성되어 있을 경우에는

$$SNR = \frac{SNR/_q - a^2}{1+a^2-2ac}$$

로 근사시킬 수 있다. 또한 granular noise는 일반적으로 입력신호에 독립된 특성임을 고찰한 것으로 임의의 電壓確率分布函數를 지닌 신호에 대해서도 위의 근사식을 적용할 수 있음을 볼 수 있다.

Reference

1) J.B.O'Neal, JR "Signal-to-Quantizing Ratios for Differential PCM", IEEE Tran. Comm., Vol.19(August 1971), pp.568-569

2) N.J.Jayant, "On the Delta Modulation of a First-Order Gauss-Markov Signal", IEEE Trans. Comm, Vol.26, No.1, pp.150-156

3) P.Cummiskey, "Single-Integration, Adaptive Delta Modulation", B.S.T.J., Vol.54, No.8, pp. 1463-1474

4) David J. Goodman, "Delta Modulation Granular Quantizing Noise", B.S.T.J., Vol.49(August 1969), pp. 1197-1218